量子力学　第１０回演習　解答

光の量子状態について考える. 光は量子力学的 1 次元調和振動子として取り扱えるため, 光に対するハミルトニアンは,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

と表される．ここで，生成演算子 $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}$，消滅演算子 $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}$，個数演算子 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ とし，個数演算子 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ に対する固有ベクトルを $|n\rangle$，固有値を n （$n = 0,1,2,\cdots$）とする（$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$）．$|n\rangle$ は完全規格直交系をなすことがわかっている．以下の問に答えよ．

1.　$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$（$\alpha$ は複素数）で表される状態を考える．$|\alpha\rangle$ をコヒーレント状態を呼ぶ．$|\alpha\rangle$ が消滅演算子 $\hat{a}$ に対する固有ベクトルになっていることを示せ．また $|\alpha\rangle$ の $\hat{a}$ に対する固有値を求めよ．

【解答】

$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ であることから,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\hat{a}|n\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}}|n-1\rangle = \alpha e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}|m\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

が成り立つ．これより，$|\alpha\rangle$ は消滅演算子 $\hat{a}$ に対する固有ベクトルであり，　$|\alpha\rangle$ の $\hat{a}$ に対する固有値は α であることがわかる．

2.　$|\alpha\rangle$ に対する平均光子数 $\langle n\rangle$ と光子数のばらつき $\langle \Delta n\rangle$ を求めよ．

【解答】

$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ の両辺の転置複素共役を取ると,

$$\left(\hat{a}|\alpha\rangle\right)^{\dagger} = \left(\alpha|\alpha\rangle\right)^{\dagger}$$
$$\langle\alpha|\hat{a}^{\dagger} = \alpha^{*}\langle\alpha|$$
の関係式が成り立つ．

平均光子数$\langle n\rangle$を求めると，
$$\langle n\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\alpha^{*}\alpha|\alpha\rangle = |\alpha|^{2}\langle\alpha|\alpha\rangle = |\alpha|^{2} \quad \left(\because \langle\alpha|\alpha\rangle = 1\right)$$
と求められる．

次に光子数のばらつき$\langle \mathit{\Delta} n\rangle$を求める．
$$\begin{aligned}\left\langle n^{2}\right\rangle &= \langle\alpha|\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right)^{2}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|\alpha\rangle \\ &= \langle\alpha|\alpha^{*}\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\alpha|\alpha\rangle \\ &= |\alpha|^{2}\langle\alpha|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+1|\alpha\rangle = |\alpha|^{2}\left(|\alpha|^{2}+1\right) \\ &\left(\because \left[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}\right] = 1, \langle\alpha|\alpha\rangle = 1\right)\end{aligned}$$
であることから，$\langle \mathit{\Delta} n\rangle$は
$$\langle \mathit{\Delta} n\rangle = \sqrt{\left\langle n^{2}\right\rangle - \langle n\rangle^{2}} = \sqrt{|\alpha|^{2}\left(|\alpha|^{2}+1\right) - |\alpha|^{4}} = |\alpha| = \sqrt{\langle n\rangle}$$
と求められる．

3. 波長 600 nm，光強度 1 mW のレーザー光から 1 秒間あたりに発生する光子の平均光子数$\langle n\rangle$と光子数のばらつき$\langle \mathit{\Delta} n\rangle$を求めよ．

【解答】

波長λ = 600 nm の光子 1 つのエネルギーE_{photon}は，
$$E_{photon} = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} \cong 3.3\times10^{-19}\ \mathrm{J}$$
と求められる．したがって，光強度 1 mW のレーザー光から 1 秒間あたりに発生する光子の平均光子数$\langle n\rangle$は，
$$\langle n\rangle = \frac{1\mathrm{mJ/s}}{E_{photon}} \cong 3.0\times10^{15}\ \mathrm{/s}$$
となる．また光子数のばらつき$\langle \mathit{\Delta} n\rangle$は
$$\langle \mathit{\Delta} n\rangle = |\alpha| = \sqrt{\langle n\rangle} \cong 5.5\times10^{7}\ \mathrm{/s^{1/2}}$$
となる．

4.　$|\alpha\rangle$ が最小不確定状態（$\langle \Delta p\rangle \cdot \langle \Delta x\rangle = \dfrac{\hbar}{2}$）になっていることを示せ.

【解答】

まず $\langle \Delta p\rangle$ を求める．$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|$ より，

$$
\begin{aligned}
\langle p\rangle &= \langle\alpha|\,\hat{p}\,|\alpha\rangle = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\langle\alpha|\hat{a}-\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle \\
&= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\alpha-\alpha^*\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle p^2\right\rangle &= \langle\alpha|\,\hat{p}^2\,|\alpha\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\langle\alpha|\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)^2|\alpha\rangle \\
&= -\frac{m\hbar\omega}{2}\langle\alpha|\hat{a}\hat{a}+\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger-2\hat{a}^\dagger\hat{a}-1|\alpha\rangle \qquad \left(\because \left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=1\right) \\
&= -\frac{m\hbar\omega}{2}\left\{\alpha^2+\left(\alpha^*\right)^2-2|\alpha|^2-1\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta p\rangle &= \sqrt{\left\langle p^2\right\rangle-\langle p\rangle^2} \\
&= \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\cdot\sqrt{-\left\{\alpha^2+\left(\alpha^*\right)^2-2|\alpha|^2-1\right\}+\left\{\alpha^2+\left(\alpha^*\right)^2-2|\alpha|^2\right\}} \\
&= \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}
\end{aligned}
$$

同様にして $\langle \Delta x\rangle$ を求める.

$$
\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\alpha|\hat{a}+\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\alpha+\alpha^*\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle x^2\right\rangle &= \langle\alpha|\,\hat{x}^2\,|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\alpha|\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)^2|\alpha\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\alpha|\hat{a}\hat{a}+\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger+2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1|\alpha\rangle\left(\because \left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=1\right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\alpha^2+\left(\alpha^*\right)^2+2|\alpha|^2+1\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta x\rangle &= \sqrt{\left\langle x^2\right\rangle-\langle x\rangle^2} \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cdot\sqrt{\left\{\alpha^2+\left(\alpha^*\right)^2+2|\alpha|^2+1\right\}-\left\{\alpha^2+\left(\alpha^*\right)^2+2|\alpha|^2\right\}} \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}
\end{aligned}
$$

したがって，不確定積 $\langle \Delta p\rangle \cdot \langle \Delta x\rangle$ は,

$$
\langle \Delta p\rangle \cdot \langle \Delta x\rangle = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = \frac{\hbar}{2}
$$

であることがわかる．これより，コヒーレント状態$|\alpha\rangle$は最小不確定状態であることが示された．