量子力学　第 9 回演習解答

光の量子状態について考える. 光は量子力学的 1 次元調和振動子として取り扱えるため, 光に対するハミルトニアンは,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

と表される．ここで，生成演算子 $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}$，消滅演算子 $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}$，個数演算子 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ とし，個数演算子 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ に対する固有ベクトル（完全規格直交系）を $|n\rangle$，固有値を $n\left(n=0,1,2,\cdots\right)$ とする．

1.　個数状態 $|n\rangle$（光子数状態と呼ぶ）に関して以下の問いに答えよ．

A）　期待値 $\langle p\rangle, \langle x\rangle, \langle p^2\rangle, \langle x^2\rangle$ を求めよ（ヒント：$\hat{x}, \hat{p}$ を $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ で表す）

【解答】

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right), \qquad \hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\hat{a}^2 + \left(\hat{a}^\dagger\right)^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\right\} = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\hat{a}^2 + \left(\hat{a}^\dagger\right)^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1\right\}$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right), \qquad \hat{p}^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left\{\hat{a}^2 + \left(\hat{a}^\dagger\right)^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\right\} = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left\{\hat{a}^2 + \left(\hat{a}^\dagger\right)^2 - \left(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1\right)\right\}$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$$

であることから,

$$\begin{aligned}
&\langle n|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\langle n|n-1\rangle = 0, \langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle = 0 \\
&\langle n|\hat{a}^2|n\rangle = \sqrt{n}\sqrt{n-1}\langle n|n-2\rangle = 0, \langle n|\left(\hat{a}^\dagger\right)^2|n\rangle = \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\langle n|n+2\rangle = 0 \\
&\langle n|2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1|n\rangle = 2n+1
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって,

$$\begin{aligned}
&\langle p\rangle = \langle n|\hat{p}|n\rangle = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left\{\langle n|\hat{a}|n\rangle - \langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle\right\} = 0 \\
&\langle x\rangle = \langle n|\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\langle n|\hat{a}|n\rangle + \langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle\right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle = \langle n|\hat{p}^2|n\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left\{\langle n|\hat{a}^2|n\rangle + \langle n|\left(\hat{a}^\dagger\right)^2|n\rangle - \langle n|2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1|n\rangle\right\} = \frac{m\hbar\omega}{2}(2n+1)$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \langle n|\hat{x}^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\langle n|\hat{a}^2|n\rangle + \langle n|\left(\hat{a}^\dagger\right)^2|n\rangle + \langle n|2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1|n\rangle\right\} = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)$$

となる.

B） ばらつき $\langle \Delta p\rangle, \langle \Delta x\rangle$ を計算し，不確定積 $\langle \Delta p\rangle \cdot \langle \Delta x\rangle$ を求めよ（ヒント：$\langle \Delta p\rangle = \sqrt{\left\langle p^2\right\rangle - \langle p\rangle^2}$ ）

【解答】

$$\langle \Delta p\rangle = \sqrt{\left\langle p^2\right\rangle - \langle p\rangle^2} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}(2n+1)}$$

$$\langle \Delta x\rangle = \sqrt{\left\langle x^2\right\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)}$$

したがって，不確定積は

$$\langle \Delta p\rangle \cdot \langle \Delta x\rangle = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}(2n+1)} \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)} = \frac{\hbar}{2}(2n+1)$$

となる.

C） B）の結果から，$|n\rangle$ が最小不確定状態か否か議論せよ.（ヒント：n の値によって場合分けする）

【解答】

(i) $n=0$（最低エネルギー状態）の場合：

$\langle \Delta p\rangle \cdot \langle \Delta x\rangle = \dfrac{\hbar}{2}$ であり，最小不確定状態となっている.

(i) $n \geq 1$ の場合：

$\langle \Delta p\rangle \cdot \langle \Delta x\rangle = \dfrac{\hbar}{2}(2n+1) > \dfrac{\hbar}{2}$ であり，最小不確定状態となっていない.不確定積は n が大きくなる程大きくなることがわかる.

D）　平均光子数（個数の期待値）$\langle n \rangle$ と光子数のばらつき $\langle \Delta n \rangle$ を求めよ（ヒント：$\langle n \rangle = \langle n | \hat{a}^{\dagger}\hat{a} | n \rangle$）

【解答】

$\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$ より，平均光子数 $\langle n \rangle$ は，

$$\langle n \rangle = \langle n | \hat{a}^{\dagger}\hat{a} | n \rangle = n$$

となる．また光子数のばらつき $\langle \Delta n \rangle$ は，

$$\langle n^2 \rangle = \langle n | \left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right)^2 | n \rangle = n^2$$

$$\langle \Delta n \rangle = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} = \sqrt{n^2 - n^2} = 0$$

となる．

E）　D）の結果および光子数と位相の不確定性関係より，個数状態 $|n\rangle$ の光電場の振幅および位相の振る舞いを推察し，説明せよ．

【解答】

光子数のばらつき $\langle \Delta n \rangle$ と位相のばらつき $\langle \Delta \phi \rangle$ の間には，不確定性関係 $\langle \Delta n \rangle \cdot \langle \Delta \phi \rangle \geq \dfrac{1}{2}$ が成り立つ．個数状態 $|n\rangle$ における光子数のばらつきは $\langle \Delta n \rangle = 0$ であることから，位相のばらつき $\langle \Delta \phi \rangle$ は非常に大きいことがわかる．すなわち個数状態 $|n\rangle$ においては，光電場の振幅の最大値はばらつきのない一定値を取り，光電場の位相はばらばらの値を取ることが予想される．位相がばらばらのため，光電場は互いに打ち消し合い，光電場の期待値（平均値）はゼロになると推察される．

2.　個数状態の重ね合わせ状態 $|\Psi\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|n\rangle + |n+1\rangle\right)$ 関して以下の問いに答えよ．

A）　期待値 $\langle p \rangle, \langle x \rangle, \langle p^2 \rangle, \langle x^2 \rangle$ を求めよ．

【解答】

$$\langle p \rangle = \langle \Psi | \hat{p} | \Psi \rangle = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \cdot \frac{1}{2}\left\{\langle n | \hat{a} - \hat{a}^{\dagger} | n \rangle + \langle n+1 | \hat{a} - \hat{a}^{\dagger} | n \rangle + \langle n | \hat{a} - \hat{a}^{\dagger} | n+1 \rangle + \langle n+1 | \hat{a} - \hat{a}^{\dagger} | n+1 \rangle\right\}$$

$$= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \cdot \frac{1}{2}\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+1}\right\} = 0$$

$$\langle x\rangle=\langle\Psi|\hat{x}|\Psi\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cdot\frac{1}{2}\left\{\langle n|\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}|n\rangle+\langle n+1|\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}|n\rangle+\langle n|\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}|n+1\rangle+\langle n+1|\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}|n+1\rangle\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cdot\frac{1}{2}\left\{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\right\}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}(n+1)}$$

$$\langle p^2\rangle=\langle\Psi|\hat{p}^2|\Psi\rangle$$

$$=-\frac{m\hbar\omega}{2}\cdot\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\langle n|\hat{a}^2+(\hat{a}^{\dagger})^2|n\rangle+\langle n+1|\hat{a}^2+(\hat{a}^{\dagger})^2|n\rangle+\langle n|\hat{a}^2+(\hat{a}^{\dagger})^2|n+1\rangle+\langle n+1|\hat{a}^2+(\hat{a}^{\dagger})^2|n+1\rangle\\-\langle n|2\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+1|n\rangle-\langle n+1|2\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+1|n\rangle-\langle n|2\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+1|n+1\rangle-\langle n+1|2\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+1|n+1\rangle\end{array}\right\}$$

$$=-\frac{m\hbar\omega}{2}\cdot\frac{1}{2}\left\{-(2n+1)-(2n+3)\right\}=m\hbar\omega(n+1)$$

$$\langle x^2\rangle=\langle n|\hat{x}^2|n\rangle$$

$$=\frac{\hbar}{2m\omega}\cdot\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\langle n|\hat{a}^2+(\hat{a}^{\dagger})^2|n\rangle+\langle n+1|\hat{a}^2+(\hat{a}^{\dagger})^2|n\rangle+\langle n|\hat{a}^2+(\hat{a}^{\dagger})^2|n+1\rangle+\langle n+1|\hat{a}^2+(\hat{a}^{\dagger})^2|n+1\rangle\\+\langle n|2\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+1|n\rangle+\langle n+1|2\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+1|n\rangle+\langle n|2\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+1|n+1\rangle+\langle n+1|2\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+1|n+1\rangle\end{array}\right\}$$

$$=\frac{\hbar}{2m\omega}\cdot\frac{1}{2}\left\{(2n+1)+(2n+3)\right\}=\frac{\hbar}{m\omega}(n+1)$$

B) ばらつき$\langle\Delta p\rangle,\langle\Delta x\rangle$を計算し，不確定積$\langle\Delta p\rangle\cdot\langle\Delta x\rangle$を求めよ．

【解答】

$$\langle\Delta p\rangle=\sqrt{\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2}=\sqrt{m\hbar\omega(n+1)-0}=\sqrt{m\hbar\omega(n+1)}$$

$$\langle\Delta x\rangle=\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2}=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}(n+1)-\frac{\hbar}{2m\omega}(n+1)}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}(n+1)}$$

したがって，不確定積は

$$\langle\Delta p\rangle\cdot\langle\Delta x\rangle=\sqrt{m\hbar\omega(n+1)}\cdot\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}(n+1)}=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}(n+1)$$

となる．

C) B）の結果から，$|\Psi\rangle$が最小不確定状態か否か議論せよ．

【解答】

$n\geq 0$において$\langle\Delta p\rangle\cdot\langle\Delta x\rangle=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}(n+1)>\frac{\hbar}{2}$であり，全ての$n$に対して$|\Psi\rangle$は最小不確定状態となっていない．不確定積は$n$が大きくなる程大きくなることがわかる．

3.　星の光が人の目で見える理由を量子力学的に説明せよ.

【解答】

第９回講義ライブビデオを参照下さい.

4.　理想的な個数状態$|n\rangle$の光は身近には存在しない．その理由を説明せよ.

【解答】

第９回講義ライブビデオを参照下さい.

5.　第９回講義の中で紹介された単一光子もしくはもつれ合い光子の発生・検出方法, 応用例に関して１つ以上紹介し説明せよ.

【解答】

第９回講義ライブビデオを参照下さい.