

量子力学 第9回演習  
締切：5月31日（日）12時

- ・ 解答は、コピー防止のため手書きで作成して下さい。
- ・ 解答は一つのPDFファイルにまとめて下さい（複数ファイルに分けない）。
- ・ 解答の冒頭に、「量子力学 出題日付 第○回演習 学籍番号 氏名」を明記して下さい。
- ・ 導出過程も明記して下さい。
- ・ 第8・9回講義・演習で求めた関係式は、既知のものとして用いても良い。

光の量子状態について考える。光は量子力学的1次元調和振動子として取り扱えるため、光に対するハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2$$

と表される。ここで、生成演算子  $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}$ 、消滅演算子

$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}$ 、個数演算子  $\hat{a}^\dagger\hat{a}$  とし、個数演算子  $\hat{a}^\dagger\hat{a}$  に対する固有ベクトル（完全規格直交系）を  $|n\rangle$ 、固有値を  $n(n=0,1,2,\dots)$  とする。

1. 個数状態  $|n\rangle$ （光子数状態と呼ぶ）に関して以下の問いに答えよ。
  - A) 期待値  $\langle p \rangle, \langle x \rangle, \langle p^2 \rangle, \langle x^2 \rangle$  を求めよ（ヒント： $\hat{x}, \hat{p}$  を  $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$  で表す）
  - B) ばらつき  $\langle \Delta p \rangle, \langle \Delta x \rangle$  を計算し、不確定積  $\langle \Delta p \rangle \cdot \langle \Delta x \rangle$  を求めよ（ヒント： $\langle \Delta p \rangle = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ ）
  - C) B)の結果から、 $|n\rangle$ が最小不確定状態か否か議論せよ。（ヒント： $n$ の値によって場合分けする）
  - D) 平均光子数（個数の期待値） $\langle n \rangle$ と光子数のばらつき  $\langle \Delta n \rangle$ を求めよ（ヒント： $\langle n \rangle = \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle$ ）
  - E) D)の結果および光子数と位相の不確定性関係より、個数状態  $|n\rangle$ の光電場の振幅および位相の振る舞いを推察し、説明せよ。

2. 個数状態の重ね合わせ状態  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle + |n+1\rangle)$  に関して以下の問いに答えよ.
- A) 期待値  $\langle p \rangle, \langle x \rangle, \langle p^2 \rangle, \langle x^2 \rangle$  を求めよ.
  - B) ばらつき  $\langle \Delta p \rangle, \langle \Delta x \rangle$  を計算し, 不確定積  $\langle \Delta p \rangle \cdot \langle \Delta x \rangle$  を求めよ.
  - C) B) の結果から,  $|\Psi\rangle$  が最小不確定状態か否か議論せよ.
3. 星の光が人の目で見える理由を量子力学的に説明せよ.
4. 理想的な個数状態  $|n\rangle$  の光は身近には存在しない. その理由を説明せよ.
5. 第9回講義の中で紹介された単一光子もしくはもつれ合い光子の発生・検出方法, 応用例に関して1つ以上紹介し説明せよ.