量子力学　第５回演習

締切：5 月１７日（日）12 時

・解答は，コピペ防止のため手書きで作成して下さい．
・解答は一つの PDF ファイルにまとめて下さい（複数ファイルに分けない）．
・解答の冒頭に,「量子力学　出題日付　第〇回演習　学籍番号　氏名」を明記して下さい．
・導出過程も明記して下さい．
・第 4 回講義資料（行列力学の基礎）の 15 ページ目にある公式は，既知のものとして用いても良い．

スピン 1/2 の 2 準位系を考える．スピン角運動量の z 成分を表す演算子 $\hat{S}_z$ に対する固有ベクトルを $|\alpha\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},|\beta\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とおくと，固有ベクトル $|\alpha\rangle,|\beta\rangle$ に対する固有値が $\frac{\hbar}{2},-\frac{\hbar}{2}$ であることから，$\hat{S}_z|\alpha\rangle=\frac{\hbar}{2}|\alpha\rangle,\hat{S}_z|\beta\rangle=-\frac{\hbar}{2}|\beta\rangle$ の関係が成り立つことがわかる．またパウリ行列を $\hat{S}_i=\frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_i\ \left(i=x,y,z\right)$ と定義すると，上記の関係式は $\hat{\sigma}_z|\alpha\rangle=|\alpha\rangle,\hat{\sigma}_z|\beta\rangle=-|\beta\rangle$ と表される．以下の問題に答えよ．ただし答えだけでなく，導出過程も明記すること．

1. 固有ベクトル $|\alpha\rangle,|\beta\rangle$ は完全規格直交系をなすことから，$|\alpha\rangle,|\beta\rangle$ を基底ベクトルとして，任意の状態ベクトル $|\Psi\rangle$ を $|\alpha\rangle,|\beta\rangle$ の重ね合わせ状態 $|\Psi\rangle=a|\alpha\rangle+b|\beta\rangle$ で表すことができる． $|\Psi\rangle$ のノルムの 2 乗が 1（規格化条件）となるために，a,b が満たすべき関係式を求めなさい．この結果から，$|a|^2,|b|^2$ の示す物理的意味を答えなさい．

（以下の問題では $|\Psi\rangle$ は規格化されているとする）

2. $|\alpha'\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},|\beta'\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ が完全規格直交系をなすことを示せ（ヒント：規格化⇒ $\langle\alpha'|\alpha'\rangle=\langle\beta'|\beta'\rangle=1$，直交系⇒ $\langle\alpha'|\beta'\rangle=0$，完全系⇒ $|\alpha'\rangle\langle\alpha'|+|\beta'\rangle\langle\beta'|=\hat{1}$（恒等演算子）をそれぞれ示せば良い．）
（補足：完全規格直交系をなすベクトルであれば基底ベクトルになり得ることから，$|\alpha\rangle,|\beta\rangle$ でなく，$|\alpha'\rangle,|\beta'\rangle$ を用いても良い．ただし一般的には，基底ベクトルが $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ となるように，座標変換（基底変換）を行なう）

3. $\hat{\sigma}_z$ の行列表現（2 行 2 列の行列）$\hat{\sigma}_z=\begin{pmatrix}\langle\alpha|\hat{\sigma}_z|\alpha\rangle & \langle\alpha|\hat{\sigma}_z|\beta\rangle\\ \langle\beta|\hat{\sigma}_z|\alpha\rangle & \langle\beta|\hat{\sigma}_z|\beta\rangle\end{pmatrix}$ を求めなさい．この結果から，$\hat{\sigma}_z\left(\hat{S}_z\right)$ の対角成分のもつ物理的意味を言葉で説明せよ．

4. 問１・３の結果から，任意の状態ベクトル$\left|\Psi\right\rangle$に対するσ_zおよびS_zの期待値$\left\langle\sigma_z\right\rangle=\left\langle\Psi\right|\hat{\sigma}_z\left|\Psi\right\rangle$および$\left\langle S_z\right\rangle=\dfrac{\hbar}{2}\left\langle\sigma_z\right\rangle$を求めなさい．またその結果から，$\left\langle S_z\right\rangle$を数式で表した時の各項のもつ物理的意味を説明しなさい．
5. パウリ行列 $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$ を用いて昇降演算子 $\hat{\sigma}^{\pm}=\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y$ を定義すると，$\hat{\sigma}^{-}\left|\alpha\right\rangle=2\left|\beta\right\rangle,\hat{\sigma}^{+}\left|\beta\right\rangle=2\left|\alpha\right\rangle,\hat{\sigma}^{+}\left|\alpha\right\rangle=\hat{\sigma}^{-}\left|\beta\right\rangle=0$の関係が成り立つことがわかっている．これより，$\hat{\sigma}^{+}, \hat{\sigma}^{-}$の行列表現（2 行 2 列の行列）を求めよ．この結果から，$\hat{\sigma}^{+}, \hat{\sigma}^{-}\left(\hat{S}_z^{+},\hat{S}_z^{-}\right)$の非対角成分のもつ物理的意味を言葉で説明せよ．
6. 問 5 の結果から，$\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$ の行列表現を求めよ．（ヒント：$\hat{\sigma}_x=\dfrac{1}{2}\left(\hat{\sigma}^{+}+\hat{\sigma}^{-}\right), \hat{\sigma}_y=\dfrac{1}{2i}\left(\hat{\sigma}^{+}-\hat{\sigma}^{-}\right)$を用いる．）また，パウリ行列に関して，$\hat{\sigma}_x^2=\hat{\sigma}_y^2=\hat{\sigma}_z^2=\hat{1},\left\langle\sigma_x^2\right\rangle=\left\langle\sigma_y^2\right\rangle=\left\langle\sigma_z^2\right\rangle=1$が成り立つことを示せ．
7. 問３・６の結果から，パウリ行列の交換関係が$\left[\hat{\sigma}_y,\hat{\sigma}_z\right]=2i\hat{\sigma}_x$となることを示せ．またこの結果が示す物理的意味を説明しなさい．測定可能か否か説明しなさい．
8. $\left|\Psi\right\rangle$に対する$\hat{\sigma}_y,\hat{\sigma}_z$の期待値$\left\langle\sigma_y\right\rangle,\left\langle\sigma_z\right\rangle$およびばらつき（標準偏差）$\left\langle\Delta\sigma_y\right\rangle,\left\langle\Delta\sigma_z\right\rangle$を(i) $a=1,b=0$，(ii) $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}},b=\dfrac{i}{\sqrt{2}}$の場合についてそれぞれ求めなさい．この結果から，(i),(ii)で表される状態ベクトルは，どのような状態を表したものか，言葉で説明しなさい．

   （ヒント：$\left\langle\sigma_i\right\rangle=\left\langle\Psi\right|\hat{\sigma}_i\left|\Psi\right\rangle,\left\langle\sigma_i^2\right\rangle=\left\langle\Psi\right|\hat{\sigma}_i^2\left|\Psi\right\rangle,\left\langle\Delta\sigma_i\right\rangle=\sqrt{\left\langle\sigma_i^2\right\rangle-\left\langle\sigma_i\right\rangle^2}=\sqrt{1-\left\langle\sigma_i\right\rangle^2}$）

量子力学に関する素朴な疑問や授業に対するコメント，質問・感想等があれば書いて下さい．