量子力学　第６回演習

締切：5月２０日（水）１２時

・解答は，コピペ防止のため手書きで作成して下さい.

・解答は一つの PDF ファイルにまとめて下さい（複数ファイルに分けない）.

・解答の冒頭に,「量子力学　出題日付　第〇回演習　学籍番号　氏名」を明記して下さい.

・導出過程も明記して下さい.

・第 4 回講義資料（行列力学の基礎）の 15 ページ目にある公式は，既知のものとして用いても良い.

・パウリ行列およびその性質は既知のものとして用いても良い.

1. シュテルンとゲルラッハは，スピンの特定方向成分を測定する実験を行なった. その実験結果に関して，“古典的に説明できない点”は何か，思いつく限り挙げ説明せよ.

2. ２準位系のハミルトニアン $\hat{H}$ が $\hat{H}=\varepsilon_0\hat{\sigma}_z+g\hat{\sigma}_x$ で与えられている. ε_0, g はエネルギーの次元をもつ定数であり，正の実数とする.

(1) $\hat{\sigma}_z$ に対する固有ベクトル $|\alpha\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, |\beta\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を基底ベクトルとした場合のハミルトニアン $\hat{H}$ を求め，２行２列の行列および $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ を用いたブラ・ケット表現の２通りの表現法で表せ. またハミルトニアン $\hat{H}$ の対角項，非対角項の示す物理的意味を言葉で説明せよ.

（補足：行列表現とブラ・ケット表現の変換例　$\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}=|\alpha\rangle\langle\beta|$）

(2) エネルギー固有値 $\varepsilon_1, \varepsilon_2\left(\varepsilon_1>\varepsilon_2\right)$ を求めよ.　また $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を ε_0 の関数として概形をグラフに示せ. グラフを書く際には，横軸・縦軸の表す物理量および極大・極小における縦軸・横軸の値をグラフ中に明記すること.

(3) $\varepsilon_0=0$ の場合について，$\varepsilon_1, \varepsilon_2\left(\varepsilon_1>\varepsilon_2\right)$ および $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ に対応する規格化された固有ベクトル $|\varphi_1\rangle=a_1|\alpha\rangle+b_1|\beta\rangle=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}, |\varphi_2\rangle=a_2|\alpha\rangle+b_2|\beta\rangle=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}$ を求めよ.

(4)　任意の状態ベクトル$\left|\Psi\right\rangle$は，$\left|\alpha\right\rangle,\left|\beta\right\rangle$を基底ベクトルとして，その重ね合わせ$\left|\Psi\right\rangle = a\left|\alpha\right\rangle + b\left|\beta\right\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$で表される．一方，$\left|\Psi\right\rangle$は問（3）で求めた$\left|\varphi_1\right\rangle,\left|\varphi_2\right\rangle$を基底ベクトルとして，$\left|\Psi\right\rangle = p_1\left|\varphi_1\right\rangle + p_2\left|\varphi_2\right\rangle = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$と表すこともできる（基底ベクトルは完全規格直交系であれば何でも良い）．$\left|\alpha\right\rangle,\left|\beta\right\rangle$を基底ベクトルとする状態表現から，$\left|\varphi_1\right\rangle,\left|\varphi_2\right\rangle$を基底ベクトルとする状態表現へ変換（基底変換）するための演算子$\hat{T}$を求めよ．また$\hat{T}$がユニタリーであることを示し，ユニタリー変換の前と後の状態ベクトルのノルムの２乗（確率に相当）が保存されることを示せ．

（補足：$\hat{T}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{T}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$となる$\hat{T}$を求めれば良い．）

（補足：基底変換とは，座標軸を回転させて，基底ベクトルにしたい固有ベクトルと座標軸の方向を一致させる変換であるとイメージできる）

(5)　問(4)で得た$\hat{T}$を用いて，$\varepsilon_0 = 0$におけるハミルトニアンを基底変換し，基底変換後の対角化されたハミルトニアン$\hat{H}'$を求めよ．

第７回講義（5 月 22 日）ライブ配信にて話して欲しいことがあればお書き下さい．