

量子力学 第8回演習
締切：5月27日（水）12時

- ・解答は、コピー防止のため手書きで作成して下さい。
- ・解答は一つのPDFファイルにまとめて下さい（複数ファイルに分けない）。
- ・解答の冒頭に、「量子力学 出題日付 第○回演習 学籍番号 氏名」を明記して下さい。
- ・導出過程も明記して下さい。

量子力学的1次元調和振動子について考える。ハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2$$

と表される。ここで、生成演算子 $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}$ 、消滅演算子

$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}$ 、個数演算子 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ とし、個数演算子 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ に対する固有ベクトルを

$|n\rangle$ 、固有値を n とする ($\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$)。 $|n\rangle$ は完全規格直交系をなすことがわかっている。以下の問に答えよ。

1. 交換関係を計算し、 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ となることを示せ。またその結果から、 \hat{a} と \hat{a}^\dagger が同時固有ベクトルをもつか否か議論せよ。
2. 問1の結果を用いて、 $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ および $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ であることを示せ。
3. 以下の手順に従って、 n が非負の整数であることを示せ。
 - A) n が非負の実数であることを示す。
 - B) 問2の結果と、A)の結果を用いて、 n が非負の整数であることを言葉で説明する。
4. $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$ と表されることを示せ。この結果から、 $|n\rangle$ が \hat{H} の固有ベクトルになっていることを示し、 $|n\rangle$ に対するエネルギー固有値 ε_n を求めよ。
5. 問4の結果から、量子力学的調和振動子のエネルギー ε_n の取り得る値が、古典的調和振動子のエネルギーの取り得る値と比較して異なる点を2つ挙げよ。
6. 状態ベクトル $|0\rangle$ の座標表示（波動関数）を $\Psi_0(x)$ とする。 $\hat{a}\Psi_0(x) = 0$ であることから、

$\Psi_0(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}x^2\right)$ となることを示せ。ここで $\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$ である。この結果を用いて、

存在確率 $|\Psi_0(x)|^2$ を計算し、 x の関数としてグラフに書け。グラフ中に、古典的転回点における x 座標 x_{\max} と存在確率 $|\Psi_0(x_{\max})|^2$ を明記せよ。（ヒント：古典的転回点では、

$\varepsilon_n = \frac{1}{2}m\omega^2x_{\max}^2$ の関係が成り立つ。古典的調和振動子では、 $x \leq x_{\max}$ が成り立つ）

7. 問7の結果から、位置 x の取り得る値について、量子力学的調和振動子と古典的調和振動子を比較して異なる点を、思いつく限り挙げよ。

<付録>

第6回演習で、「来年から研究室に配属されるが、今の時期に授業以外でどんな勉強をしておけばいいか?」という質問を受けましたので、私なりのアドバイスをいたします。

まずどの研究室に配属されるにしても、基礎学力は重要ですから、授業の内容をしっかりと理解するようにして下さい。ここで重要なことは、物理的に理解するということです。単に暗記して授業を乗り切ただけだと、研究の場でそれを活かすことができません。暗記するのではなく、中身を理解するようにしましょう。

授業以外では、色々なことに興味をもつようにしましょう。研究で一番重要なことは、好奇心・探究心をもつことです。自分で好奇心や探究心を持って研究に自主的・積極的に向き合う人のみが、成長できるし、良い成果を出すことができます。研究では、答えのないことに対して自分で考えて解決法を見つけるということが求められます。是非講義以外でも、本を読んだり、教員の話聞きに行ってみたり、いろいろなことに興味をもって取り組んで下さい。好奇心をもつことがとっても大事です。苦手な科目・興味をもてない科目があるのは仕方ないですが、一つでも好きな科目・興味をもてる科目や分野を見つけて、自分なりに調べたり、その分野の研究をしている教員に話を聞いてみたりして下さい。折角慶應義塾大学には、たくさんの魅力ある教員がいるのですから、遠慮せず色々話を聞いてみるといいですよ。皆さんからすると教員は近寄り難いかもしれませんが、そんなことはありません。もっと身近な存在ですし、熱心な学生からの質問は嬉しいものです。勇気を出して話を聞いてみましょう。